Wathematica 夏合宿 2024 代トポ班用
河澄響矢「トポロジーの基礎」二章まとめ

ゆーぐま

2024 年 12 月 2 日

目次

1　はじめに

どうも最近代トポに脳を侵食されているくまです．合宿でやれなかった河澄二章をだいぶ大雑把にまとめます (3 倍くらい圧縮します)．ということで一章を読んでいることを前提とします (つまり対象者はホモロジー群の使い方はわかるが具体的に何者なのか気になる人)．命題番号が本と間違えなく合ってないと思いますがまあ気にせずに行きましょう．

2　ホモロジー群の定義

合宿ではホモロジー群を使って次元の違うユークリッド空間が同相でなかったり, 写像度を定義して代数学の基本定理を証明した．そんなホモロジー群だが, 性質だけやって定義はやってないので, 定義をしていこう．

2.1　標準 n-単体

ここで標準 n-単体の話をする．

定義 2.1.1. 標準 n-単体 Δ^n とは

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, 0 \le i \le n \text{ に対して } x_i \ge 0 \text{ かつ } \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

ただし, x_i とは x の第 i 成分で, 添字 i は 0 から始まっていることに注意しよう．

- これは何者かというと, $n+1$ 次元 Euclid 空間に埋め込まれた n 次元版の正三角形 (あるいは正四面体)[*1]である．$n = 0, 1, 2$ で図を書くと,

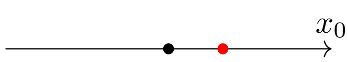

図 1　$n = 0$ のとき

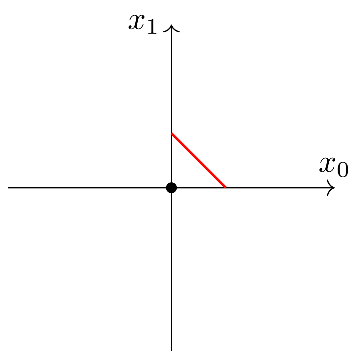

図 2　$n = 1$ のとき

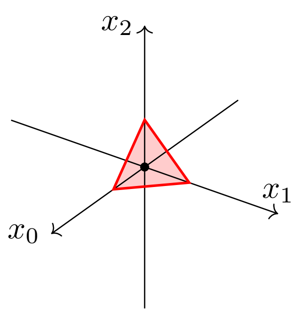

図 3　$n = 2$ のとき

- これは標準基底を $\{e_i\}$ と置いたとき, 位置ベクトル e_i に対応する点を頂点とするような凸集合となっていることが分かる．

2.2　特異 n-チェイン

ホモロジー群を知る目的としては位相空間 X の形に関するデータ, あるいは位相不変量を取り出したいということがある．それをどうやって知るのかという話なのだが, **先ほど述べた標準 n-単体を位相空間 X に貼り付けることを考える**．これはどうするのかというと, 一章で述べた路 (path) と同様に写像 $\sigma : \Delta^n \to X$ のようなものたちを考える．代数的に取り扱いやすくするため

[*1] こういうものを**正単体** (regular simplex) という

に, 整数倍して形式的に有限和を取った (すなわち自由 ($\mathbb{Z}$-) 加群)

$$S_n(X) := \mathbb{Z}X^{\Delta^n}$$

を考える. ここで X^{Δ^n} は Δ^n から X への連続写像を表す.[*2] $S_n(X)$ の元を**特異 n-チェイン**と呼ぶ. いわば特異 n-チェインとは X 上の "n 次元の路" を集めたものである.

そして, $S_n(X)$ の基底 $\sigma : \Delta^n \to X$ には $+$ か $-$ で表される**向き**というものが定まっているとみることができる. (本当は位相多様体じゃないと定義は難しそう) ここで下の枠囲みの事情があるのであまり気にしなくてもいいが, これは路が同値関係になるときに示すときに作った逆向きの路のように $\overline{\sigma}_{\text{仮}}(1-t,t) = \sigma(t,1-t)$ $(\sigma \in X^{\Delta^1})$ などと定めるの**ではなく** (そもそもこれは定義域が Δ^1 以外の時に使えない), $S_n(X)$ としての逆元を取って $\overline{\sigma} = -\sigma$ と定めることにする. こうすることで, 代数的に逆向きの路と元の路を足して消せるようにする.

なお, 以下にする話は後に定義するホモロジー群の説明まで見た後に戻ってきて欲しいのだが, 実は $\overline{\sigma}_{\text{仮}}$ を逆向きとしてもホモロジー群を考える上では問題ない. すなわち

$$[\overline{\sigma}_{\text{仮}}] = [\overline{\sigma}] = [-\sigma]$$

である. これを示すには

$$\sigma + \overline{\sigma}_{\text{仮}} = \partial_2 u = u \circ d_0 - u \circ d_1 + u \circ d_2$$

となる $u \in S_2(X)$ が存在すればよい. そこで

$$\begin{cases} u'(s, 1-s-t, t) = \sigma(1-s-t, s+t) \\ u'' = c_{\sigma(0,1)} \qquad (c_{\sigma(0,1)} \text{ は常に値が } \sigma(0,1) \text{ となる定値写像}) \\ u = u' + u'' \end{cases}$$

と取れば上を満たす. (確認せよ)

2.3 境界写像

特異 n-チェインの境界を先ほどの向きを込めて境界を取る写像を**境界写像**という. 定義は,

$$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X),\ \sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d_i)$$

但し

$$d_n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n, (x_0, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})$$

で定める. ∂_n は準同型となることは容易に確かめられる. たとえば位相空間 X 上の特異 2-チェインを構成する三角形 $\sigma \in X^{\Delta^2}$ を思い浮かべたときに, それぞれの頂点に, 定義域の頂点 e_i に対応

[*2] 本当は連続写像なので $C(\Delta^n, X)$ や $\hom(\Delta^n, X)$ と書くべきなのだろうが, こちらの方が書きやすいのでこちらを採用する.

する番号 i をつけて $a_0, a_1, a_2 \in X$ とでき, この順番に向きがついているイメージをする. ちゃんと書くならば $a_i := \sigma(e_i)$ とする. このような 2-チェインを $\sigma = (a_0a_1a_2)$ と表すことにする. 同様に 1-チェインもそう表すことにする. (もちろん, 頂点が決まっても一意に定まらないので便宜上こう書いていることに注意[*3]) これに境界写像を施すと,

$$\partial_2\sigma = \partial_2(a_0a_1a_2) = (a_1a_2) - (a_0a_2) + (a_0a_1)$$

これは図に起こすと,

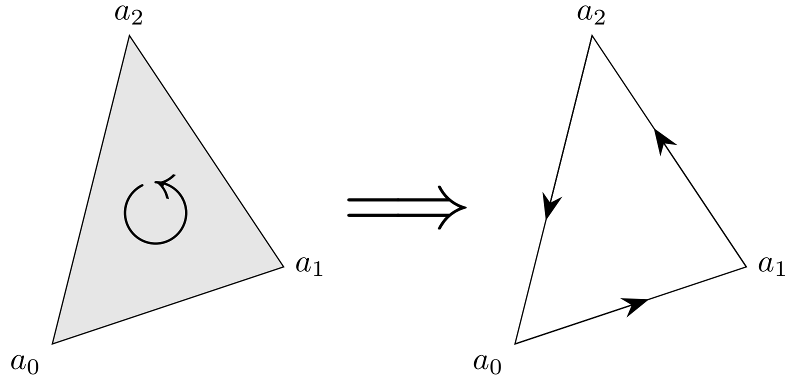

図 4　境界写像のイメージ

このような境界写像と加群 $S_n(X)$ の集まり $S_*(X)$ は**特異チェイン複体**とよばれる, 後述の**チェイン複体**の一種となり, **ホモロジー代数**というもので取り扱えるようになる.

後に述べるが, チェイン複体の性質として, 境界写像を続けて取ると 0 になる, すなわち $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 準同型として,

$$\partial_n\partial_{n+1} = 0$$

というものが課せられ (線形なので合成記号ではなくて積のように書いている), 特異チェイン複体においては $d_id_j = d_jd_{i-1}$ $(i > j)$ のような関係式を用いて示すことができる.

2.4　チェイン複体

ここで特異チェイン複体が属するチェイン複体というものを定義していく.

定義 2.4.1. **チェイン複体** C_* とは整数で添字づけられた $\mathbb{Z}$-加群 (アーベル群) の列 $\{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ とその間の準同型 $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ の組で, 準同型として

$$\partial_q\partial_{q+1} = 0 \quad ({}^\forall q \in \mathbb{Z})$$

という関係式を満たす

$$C_* : \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

のようなものを言う.

[*3] ちなみに河澄 2.4 節のアファイン単体の記号を流用している

例 2.4.2. **特異チェイン複体**とは,

$$S_*(X) : \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0 \to 0 \to \cdots$$

である. 但し, 前述のとおり, $S_q(X)$ は特異 q-チェインの集合であり, ∂_q は境界写像である.

可縮な位相空間に対してホモロジー群が簡潔になるなどの利点があるため, 以下のようなチェイン複体を用いることもある.

例 2.4.3. **添加特異チェイン複体**とは,

$$\widetilde{S}_*(X) : \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

である. 但し, $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ は $S_0(X)$ の元 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j\sigma_j$ $(\sigma \in X^{\Delta^0})$ に対して,

$$\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\sigma_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_j$$

で定められる写像である.

2.5 ホモロジー群

チェイン複体に対してはホモロジー群というものが定義できる. 分かりやすさのため注意点 (★) と $(*)$ を設けた.

定義 2.5.1. チェイン複体 C_* に対して, 第 q ホモロジー群は, 商加群 (★)

$$\operatorname{Ker}\partial_q \,/\, \operatorname{Im}\partial_{q+1} \tag{$*$}$$

のことである. 特に先ほど定義した, 特異チェイン複体のホモロジー群を**特異ホモロジー群**, 添加特異チェイン複体のホモロジー群を**被約ホモロジー群**という. *(以下の議論は被約ホモロジー群に差し替えても議論は必要だが同じようになるので省略する)*

(★) まず初めに, 加群 M と, その部分加群[*4] N に対して定義される**商加群** M/N とは, 端的に言えば M という加群に対して, N の元の差の違いを無視した加群のことで, 厳密な定義は集合としての M/N は $x \in M$ に対して,

$$x + N := \{x + n \mid n \in N\}$$

という形の集合を集めた集合であるという事であるが, これは N の元の差だけ N という集合に入れて無視したと考えると良い, これは $x + N = y + N$ と $x - y \in N$ が同値なことを示すと分かりやすい (簡単だが面倒なので読者への演習とする). そして, この $x + N, y + N \in M/N$ に対して,

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N$$

[*4] N の元の足し算は N に入るようなもの

という足し算を定めると, これは $0+N$ を単位元とする加群となる. (これは本当は $x \neq x'$ であるが $x+N = x'+N$ の時に違う M/N の元に飛ばないという well-defined 性の証明が要るが略) そして用語として写像 $p: M \to M/N$ で $p(x) := x+N$ と定められる写像を**商写像**という.

(∗) ここで, 前提としてまず部分加群をとる時は, そもそも部分集合になってないといけないので, $\operatorname{Ker}\partial_q \supset \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ が必要となる. これは, 任意に取ってきた $\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ の元 u に対して, $u = \partial_{q+1}(v)$ となる $v \in C_{q+1}$ が存在して, 複体の定義から $\partial_q\partial_{q+1} = 0$ に注意すると,

$$\partial_q(u) = \partial_q\partial_{q+1}(v) = 0$$

から, $u \in \operatorname{Ker}\partial_q$ から従う.

このホモロジー群はどのようなものか, 代数的側面と幾何的側面から語ってみることにする.

Q1. このホモロジー群は代数的にはどのようなものか？

A1. どれだけ**完全列から離れているか**である. 完全というのを思い出すと, $\operatorname{Ker}\partial_q = \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ というのが条件である. これはホモロジー群が 0 加群 (と同型である) ことに他ならない. これは何故かを一般の加群 M とその部分加群 N に関して (適宜チェイン複体の例 $M = \operatorname{Ker}\partial_q$ と $N = \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ と読み替えてもらってもよい) 説明する.

注意点 (★) で述べたように, 割る部分加群の元の差だけ同一視したものが商加群なので, 加群 M について自分自身の差だけ同一視した M/M というのは, これは構造が最も単純な 0 加群に他ならない (正確には同型). なぜならば, 任意の $m \in M$ について, $m + M = 0 + M$ だからである. 一方で, 考えると分かるが, 0 加群での剰余 $M/0$ は M そのものである. (これも本当は同型だが) つまり定量化こそできないものの割る分母である部分加群 N が M に対して "小さく"(構造が簡単に) なればなるほど M/N が "大きく"(構造が複雑に) なりそうであることが分かる.

チェイン複体に話を戻すと, $\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ が $\operatorname{Ker}\partial_q$ 基準でどれほど小さいか, どれほど構造に差があるのかというものがホモロジー群である.

Q2. このホモロジー群は幾何的にはどのようなものか？

A2. 空間上を動く紐の集合だと思うと良い. まず, $\operatorname{Im}\partial_{q+1}$, $\operatorname{Ker}\partial_q$ だとあまりに印象が付かないので, 図形的な名称を与えておこう.

定義 2.5.2. チェイン複体 C_* に対して, C_q の元を q-**チェイン**,

$$Z_q := \operatorname{Ker}\partial_q$$

の元を q-**サイクル**,

$$B_q := \operatorname{Im}\partial_{q+1}$$

の元を q-**バウンダリ**と呼ぶ.

さて, どこら辺がチェイン (鎖) や, サイクル (輪) や, バウンダリ (境界) なのか特異チェイン複体を例にして見ていく. 以下の図の曲線は $S_1(X)$(X はトーラス) の元である.

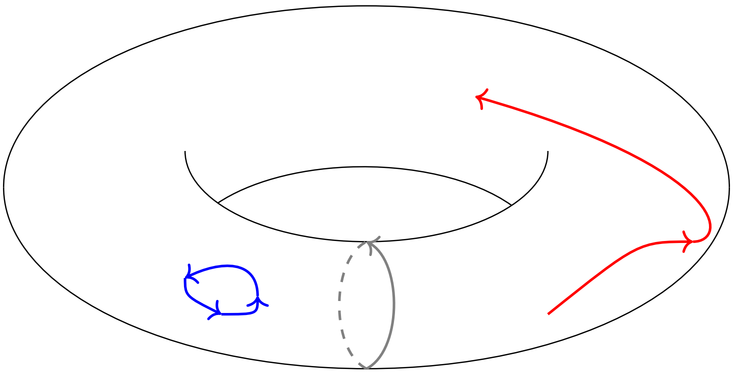

図 5　トーラス上のチェイン, サイクル, バウンダリ

まずチェインに関しては見てのとおり紐を集めたものである (繋がってなくてもよい). バウンダリに関しては境界写像の二次元の三角形の境界を取ったもの (つまり境界写像の像！) であるから図 5 のような穴に巻き付いてない閉曲線のようなもの (や, それらを足したもの) がバウンダリとなる. サイクルに関しては, もちろんバウンダリもサイクルの一種であるが, 始点と終点が一致しているような閉曲線 $\gamma : \Delta^1 \to X$ は境界を取ると始点を P として,

$$\partial_1 \gamma = \gamma((1,0)) - \gamma((0,1)) = P - P = 0$$

となり閉曲線などはサイクルという事になる.

とすると, バウンダリの違いを無視した**ホモロジー類** (ホモロジー群の元) というのはどういうものだろう？ ざっくり説明すると, サイクルを連続的に変形させたものを同一視したものである. 複素解析をやっている人は周回積分の積分路の変形みたいなものをイメージすると良い. 例えばトーラスだったら図の灰色の閉曲線が第一ホモロジー群の生成元となる.　実はここまでで, 一点からなるホモロジー群は

$$H_q(*) = \begin{cases} 0 & (q \neq 0) \\ \mathbb{Z} & (q = 0) \end{cases}$$

となることが確かめられるので, これも読者への演習課題とする (答えは教科書) また, 0 次ホモロジー群との同型 $H_0(X) = \mathbb{Z}\pi_0(X)$ は飛ばす.

2.6　チェイン写像・チェインホモトピック

加群と準同型の列で二回作用させると 0 になるものをチェイン複体というのであった. 物があったらそれを結びたくなるものなので (？), チェイン複体も結んでみる.

定義 2.6.1. 二つのチェイン複体 C_*, D_* があったときに準同型の列 $f_* = \{f_q : C_q \to D_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ で, $\partial'_q \circ f_* = f_* \circ \partial_q$, すなわち

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_*"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_*"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial'_q"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換になるものを**チェイン写像**という.

例 2.6.2. $f : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像として，準同型 $f_* : S_n(X) \to S_n(Y)$ を $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ で定めると，チェイン写像であることが確かめられる.

チェイン写像があったら，ホモロジー群の間の準同型が誘導される.

定義 2.6.3. チェイン写像 f_* に対して，

$$f_* : H_q(C_*) \to H_q(D_*), [u] \mapsto [f_*(u)]$$

で写像が定義され *(well-def 性略)*，先ほどの位相空間の連続写像から作ったチェイン写像から作ったものを連続写像 f の**誘導準同型**と呼ぶ.

定義に従って計算すると，$f : X \to Y, g : Y \to Z$，恒等写像 $1_X : X \to X$ の誘導準同型に対して以下のような補題が得られる.

補題 2.6.4.

$$(1_X)_* = 1_{H_n(X)}$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$

以上のことを使って $f, g : X \to Y$ が連続的に変形できる，すなわちホモトピックであったとき誘導準同型は $f_* = g_*$ であることを示していく．一応ホモトピックの定義をしておく.

定義 2.6.5. $f, g : X \to Y$ が**ホモトピック**であるとは連続写像 $F : X \times [0,1] \to Y$ で $F(x,0) = f(x)$, $G(x,1) = g(x)$ となるものが存在することを言い，$f \simeq g$ で書く.

ちなみにこれは同値関係になり，$X \to Y$ の写像全体をこの関係で同一視したものを $[X,Y]$ と表し，この元を**ホモトピー類**と呼び，ホモトピー類の間には合成

$$\circ : [X,Y] \times [Y,Z] \to [X,Z]$$

が定義でき，具体的には

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

で定義する. *(well-def 性略)*

さて，ホモトピックの条件は，$i_\epsilon : X \to X \times [0,1]; x \to (x,\epsilon)(\epsilon = 0,1)$ を用いて，$F \circ i_0 = f$, $F \circ i_1 = g$ と書き換えられる．なので，$i_{0*} = i_{1*}$ ならば

$$f_* = F_* \circ i_{0*} = F_* \circ i_{1*} = g_*$$

が成立する．$i_{0*} = i_{1*}$ はホモロジー群からの写像であるため，サイクル $u \in Z_n(X) = \mathrm{Ker}\,\partial$ に対して，

$$i_{0*}[u] = [i_{0*}u] = [i_{1*}u] = i_{1*}[u] \tag{$*$}$$

となっていればよく，これは，次数 (次元) が一つ増える準同型 $\Phi_q : H_q(X) \to H_{q+1}(X \times [0,1])$ で，

$$\partial_{n+1}\Phi_n + \Phi_{n-1}\partial_n = i_{1*} - i_{0*} \tag{!!!}$$

となるようなものがあれば

$$\partial_{n+1}\Phi_n u + \Phi_{n-1}\partial_n u = i_{1*}u - i_{0*}u$$

$u \in Z_n(X) = \mathrm{Ker}\,\partial$ なので，

$$\partial_{n+1}\Phi_n u = i_{1*}u - i_{0*}u$$

なので

$$i_{1*}u \equiv i_{0*}u \pmod{B_n(X) = \mathrm{Im}\,\partial}$$

より $(*)$ が従う．

少し本節の流れとはずれるが後に使うので紹介しておく概念がある．条件 (!!!) のような写像を一般化したものがチェインホモトピーと呼ばれる．

定義 2.6.6. チェイン複体 C_*, D_* の間のチェイン写像 f_*, g_* について，準同型 $\Phi_n : C_n \to D_{n+1}$ で，

$$\partial_{n+1}\Phi_n + \Phi_{n-1}\partial_n = g_* - f_*$$

となるようなものを，f_* を g_* につなぐ**チェインホモトピー**と呼び，チェイン写像の間にチェインホモトピーが存在するとき，**チェインホモトピック**という．これは上で見てもらったように，ホモロジー類を別のホモロジーのホモロジー類に飛ばす写像としては等しいことを示している．

条件 (!!!) を満たす写像は，幾何的なイメージは単体 σ を引き延ばして一次元上の $\Phi_n\sigma$ という図形に飛ばす写像である．詳しくは本書の表紙の絵をよく見てみよう．具体的にどう構成するかというと，非輪状モデル定理を用いることもできるが，ここではプリズム分解のみを紹介する．

定義 2.6.7. $s_i : \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times [0,1]$ を

$$(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}) \mapsto ((t_0, t_1, \ldots t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}), t_{i+1} + t_{i+2} + \cdots + t_{n+1})$$

で定め，$\Phi_n : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times [0,1])$ を

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ s_i$$

で定める．

を使って**!!!気合の添字計算!!!**をすると (!!!) が示せるので $i_{0*} = i_{1*}$ が示され結局ホモトピー不変性が示される．この定義で本当に表紙の図が再現できるかはやってみると面白いので手を動かしてみるとよい．

2.7 ホモロジー完全列

ここで面白い (interesting の意味) 事実を言う．チェイン複体の完全列

$$0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{i_*} D_* \xrightarrow{p_*} E_* \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

(但し, 各矢印はチェイン写像を表し, 完全性は添字を固定したときの加群の列 $0 \to C_n \to D_n \to E_n \to 0$ が完全という意味) があれば,

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{i_*} H_n(D_*) \xrightarrow{p_*} H_n(E_*) &\xrightarrow{\partial_*} \\
H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D_*) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(E_*) &\xrightarrow{\partial_*} \\
\cdots& \\
\longrightarrow H_0(C_*) \xrightarrow{i_*} H_0(D_*) \xrightarrow{p_*} H_0(E_*) &\xrightarrow{\partial_*} 0 \quad \text{(exact)}
\end{aligned}$$

という完全列が得られ, これを**ホモロジー完全列**という．

このようなものを作る一つの理由としては, ホモロジー群の計算で役に立つ Mayer-Vietoris 完全列を作りたいからというものがある．Mayer-Vietoris 完全列は, X の開被覆 $\{U, V\}$ に対し, $C_* = S_*(U \cap V)$, $D_* = S_*(U) \oplus S_*(V)$, $E_* = S_*(U) + S_*(V)$ (i_*, p_* は後で説明する) としてホモロジー完全列を取ったのち, 同型

$$H_n(S_*(U) + S_*(V)) \cong H_n(X) \qquad \textbf{(激重)} \tag{★}$$

を適用してできるものである．

さて, チェイン写像から誘導準同型が誘導されること (忘れていれば前節を見よう) から, 上の完全列の i_*, p_* の意味は理解できると思うが, この ∂_* は何なのだろうか？ これを作ることが本節の最初の目的となる．

定義域を見てみよう．$\partial_* : H_n(E_*) \to H_{n-1}(C_*)$ である．よって, サイクル $u'' \in Z_n(E_*)$ を取って, $u' \in Z_{n-1}(E_*)$ を対応させて, $[u''] \mapsto [u']$ がちゃんと写像を定めていることを確認すればこのような写像が作れそうだ．$0 \to A \to B$ なら二個目の矢印は単射, $A \to B \to 0$ なら一個目の矢印は全射に注意してこの定義の手順を見ていこう．

手順 1. 全射性より $u \in S_*(D_*)$ がとれる

$$\begin{array}{ccccc}
C_* & \xrightarrow{\text{単射 } i_*} & D_* & \xrightarrow{\text{全射 } p_*} & E_* \\
 & & & & \\
 & & {}^{\exists}u & \longmapsto & u''
\end{array}$$

手順 2. 境界写像 ∂_n で飛ばす

$$\begin{array}{ccccc}
C_* & \xrightarrow{\text{単射 } i_*} & D_* & \xrightarrow{\text{全射 } p_*} & E_* \\
 & & & & \\
 & & {}^{\exists}u & \longmapsto & u'' \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \partial_n u & &
\end{array}$$

手順 3. ところで u'' は $u'' \in Z_n = \mathrm{Ker}\,\partial$ だったので, 境界準同型で飛ばすと 0 になる.

$$
\begin{tikzcd}
C_* \arrow[r, "\text{単射}\ i_*"] & D_* \arrow[r, "\text{全射}\ p_*"] & E_* \\
& {}^{\exists}u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u'' \arrow[d, mapsto] \\
& \partial_n u & 0
\end{tikzcd}
$$

手順 4. 可換性より, $\partial_n u$ を p_* で飛ばすと 0

$$
\begin{tikzcd}
C_* \arrow[r, "\text{単射}\ i_*"] & D_* \arrow[r, "\text{全射}\ p_*"] & E_* \\
& {}^{\exists}u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u'' \arrow[d, mapsto] \\
& \partial_n u \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

手順 5. 完全性より, $\mathrm{Ker}\,p_* = \mathrm{Im}\,i_*$ なので, $i_*u' = \partial_n u$ となる u' が存在. (単射性より u' は u に対して一意に存在)

$$
\begin{tikzcd}
C_* \arrow[r, "\text{単射}\ i_*"] & D_* \arrow[r, "\text{全射}\ p_*"] & E_* \\
& {}^{\exists}u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u'' \arrow[d, mapsto] \\
u' \arrow[r, mapsto] & \partial_n u \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\partial_* : H_q(E_*) \to H_{q-1}(C_*);\ [u''] \mapsto [u']$ がちゃんと写像を定めていることと, あとこの写像が準同型であることは筆者が疲れてしまったので演習問題とする. u の任意性に注意.

このように図式上で元を追っていく議論のことを**図式追跡 (diagram chasing)** というが, やってみると楽しいので気になる人は蛇の補題, 五項補題, 九項補題などで調べてみよう！ (これらの計算はホモロジーの計算にも役立つ)

2.8 Mayer-Vietoris 完全列

前節で少し話したが, Mayer-Vietoris 完全列には雛型となるチェイン複体の完全列

$$0 \longrightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{\ i\ } S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{\ j\ } S_*(U) + S_*(V) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

がある. これはどう定義されているのか思い出そう. $\sigma \in (U \cap V)^{\Delta^n}$ に対して, **終域を適切にひろげるものとして** (これが包含写像の誘導準同型の意味である),

$$i : S_*(U \cap V) \to S_*(U) \oplus S_*(V); \quad \sigma \mapsto (\sigma, -\sigma) \qquad \text{(基底のみ表示している)}$$

これは幾何的には $U \cap V$ にあるチェインを開集合 U にはそのまま送信して, 開集合 V には逆向きで送信しているという感じである.

$\sigma \in U^{\Delta^n}$, $\tau \in V^{\Delta^n}$ に対して,

$$j : S_*(U) \oplus S_*(V) \to S_*(U) + S_*(V); \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma + \tau \qquad \text{(基底のみ表示している)}$$

これは幾何的には U にあるチェインと V にあるチェインを両方 X に貼り付けるという感じである．

チェインがホモロジー類に変わっても，すなわちこの準同型を誘導準同型に変えてもそんなに幾何的イメージが変わるわけではなく，チェインだったところが動く閉曲線 (の和)(の n 次元版) に変わるだけである．ここから前述のホモロジー完全列を取ることで

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_n(U\cap V) &\longrightarrow {\color{red}H_n(U)\oplus H_n(V)} \longrightarrow H_n(S_*(U)+S_*(V)) \longrightarrow \\ H_{n-1}(U\cap V) &\to {\color{red}H_{n-1}(U)\oplus H_{n-1}(V)} \to H_{n-1}(S_*(U)+S_*(V)) \longrightarrow \\ &\cdots \\ \longrightarrow H_0(U\cap V) &\longrightarrow {\color{red}H_0(U)\oplus H_0(V)} \longrightarrow H_0(S_*(U)+S_*(V)) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})\end{aligned}$$

という完全列が得られる．但し赤色の部分はホモロジーを取る函手と直和が可換，すなわち

$$H_n(U)\oplus H_n(V) = H_n(S_*(U)\oplus S_*(V))$$

であることを用いた．これは同型どころか集合 (とそこに入ってる構造) としてイコールなので元を取って包含関係を二つ示せば示せる．

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_n(U\cap V) &\longrightarrow H_n(U)\oplus H_n(V) \longrightarrow {\color{red}H_n(S_*(U)+S_*(V))} \longrightarrow \\ H_{n-1}(U\cap V) &\to H_{n-1}(U)\oplus H_{n-1}(V) \to {\color{red}H_{n-1}(S_*(U)+S_*(V))} \longrightarrow \\ &\cdots \\ \longrightarrow H_0(U\cap V) &\longrightarrow H_0(U)\oplus H_0(V) \longrightarrow {\color{red}H_0(S_*(U)+S_*(V))} \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})\end{aligned}$$

最後に上の図式の赤色で示したところに前節で言った同型

$$H_n(S_*(U)+S_*(V)) \cong H_n(X) \qquad \textbf{(激重)} \tag{$\bigstar$}$$

を用いることで **Mayer-Vietoris 完全列**

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_n(U\cap V) &\longrightarrow H_n(U)\oplus H_n(V) \longrightarrow {\color{red}H_n(X)} \longrightarrow \\ H_{n-1}(U\cap V) &\to H_{n-1}(U)\oplus H_{n-1}(V) \to {\color{red}H_{n-1}(X)} \longrightarrow \\ &\cdots \\ \longrightarrow H_0(U\cap V) &\longrightarrow H_0(U)\oplus H_0(V) \longrightarrow {\color{red}H_0(X)} \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})\end{aligned}$$

最後に ($\bigstar$) の同型と，連結準同型 $\partial_* : H_q(X)\to H_{q-1}(U\cap V)$ の意味を紹介する．($\bigstar$) の同型に関しては **(激重)** と書いてみたが，文字通り計算がひたすら重いので，ここではそのアイデアだけ解説する．連結準同型の話なので前節の連結準同型の対応のさせ方と対応している．

(1) ホモロジー類 (動く閉曲線)$[w]\in H_n(X)(w\in Z_n(S_*(X)))$ を取る
(2) サイクルとしては変わるがホモロジー類としては変わらないように w を粉砕し，粉砕した各パーツが U か V に含まれるようにしたサイクルを $w_0\in Z_n(S_*(X))$ とする．(Lebesgue 数を用いる) すなわち $[w]=[w_0]$.

(3) 粉砕した各パーツが U か V に含まれるので値域を制限して $w_0 \in S_*(U) + S_*(V)$ とみなせる.(これが (★) の同型)

(4) w_0 を $u \in S_*(U), v \in S_*(V)$ に分ける

$$
\begin{tikzcd}
H_* \arrow[r, "i"] & H_* \oplus H_* \arrow[r, "j"] & H_* \\
 & {}^{\exists}(u,v) \arrow[r, mapsto] & w_0
\end{tikzcd}
$$

(5) u, v の境界を取る．この時元の v の境界 $\partial_n v$ は $-\partial_n u$ と等しい (前節を見てよく考えてみよう！) 閉曲線 (1-サイクル) の場合, これは点の集まりとなる.

$$
\begin{tikzcd}
H_* \arrow[r, "i"] & H_* \oplus H_* \arrow[r, "j"] & H_* \\
 & {}^{\exists}(u,v) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & w_0 \\
 & (\partial_n u, -\partial_n u) &
\end{tikzcd}
$$

(6) この $\partial_n u$ が $\partial_* w_0$ である.

$$
\begin{tikzcd}
H_* \arrow[r, "i"] & H_* \oplus H_* \arrow[r, "j"] & H_* \\
 & {}^{\exists}(u,v) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & w_0 \\
\partial_n u \arrow[r, mapsto] & (\partial_n u, -\partial_n u) &
\end{tikzcd}
$$

(★) の同型の部分は具体的にどう示すのかというと, ホモロジー群の同型があることを言うには, 包含写像の誘導準同型 $\iota_* : H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \to H_n(S_*(X))$ の逆写像を構成すればよい.(全単射であることの必要十分条件) チェインホモトピーの意味での逆写像, すなわち,

(1) ホモロジー類を保ちながら粉砕する写像 $T_n : S_*(X) \to S_*(U) \oplus S_*(V)$ に対して, $1_{S_n(U)+S_n(V)}$ と $\iota_n T_n$ がチェインホモトピック (p.9 当たりの議論参照) であること, すなわち準同型 $\Psi : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ が存在して, 以下の条件を満たす:

$$\partial_{n+1}\Psi_n + \Psi_{n-1}\partial_n = 1_{S_n(U)+S_n(V)} - \iota_n T_n$$

(2)
$$T_n \iota_n = 1_{S_*(U)+S_*(V)}$$

(3) そもそも $\{T_n\}$ がチェイン写像である事

をしめせば, $T_{n*} : H_n(S_*(X)) \to H_n(S_*(U) \oplus S_*(V))$ が $\iota_* : H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \to H_n(S_*(X))$ の逆写像であることが言える．ここまでで Ψ_n と T_n の構成方法は言っていないが, それを言ってしまうとアドカレの期限に間に合わなくなってしまうので泣く泣く省略することにする. それではここまでご清覧ありがとうございました！