ある ζ 関数について

かまあげ

2024 年 12 月 15 日

1　はじめにの前に

なんか数式とか一切なくなってしまった．サーベイのなりそこないだと思って読んでください．[2] を読むほうがよいという説がある．

2　はじめに

リーマン多様体上にはラプラスベルトラミ作用素 Δ_p が定まります．これはユークリッド空間におけるラプラシアンの拡張で[*1]，熱方程式やポアソン方程式のようなものを考えてみたくなります．
これは単に面白いというだけではなくて，幾何学的な意味を持っています．後者は特に有名で，微分形式についての Hodge の分解定理はこの方程式を解くことで証明されます[*2]．一方前者はその基本解であるところの熱核が幾何学的な意味を持っています．例えばこれのトレースの漸近展開にはスカラー曲率の情報が出てきます．
さて，ラプラシアンは微分作用素，特に線形作用素ですから，固有値について考えたくなります．特に次のことを考えてみましょう．

問題 2.0.1. ラプラスベルトラミ作用素の固有値全体の集合はリーマン多様体についてどれだけのことを「知っている」でしょうか．

つまり，

問題 2.0.2. ラプラスベルトラミ作用素の固有値全体の集合はリーマン多様体の *(*トポロジカル，もしくはそれより強い*)* 不変量になっているでしょうか．

一般には残念ながら反例が知られていますが [1]，この考えを発展させて様々な不変量を作ることができます．そのうちの一つにこれをエンコードした ζ 関数を考えるものがあります．これが本題です．

[*1] 実際ユークリッド空間にユークリッド内積を入れたものを自然にリーマン多様体とみなした時に定まるラプラスベルトラミ作用素は普通のラプラシアンの -1 倍になります．

[*2] 多様体上の滑らかな微分形式についてのポアソン方程式が滑らかな解を持つことが本質的です．楕円形正則性は中心的な役割を果たします．あと 1 の分割．

3 ラプラシアンのζ関数

まず，以下が知られています．

定理 3.0.1. *[4]* M はコンパクト向き付きリーマン多様体とし，$\Delta_p : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ をラプラスベルトラミ作用素とする．以下が成立する．

1. Δ_p の固有値はゼロ以上．
2. Δ_p の固有空間は有限次元．
3. Δ_p の固有値は有限な集積値をもたない．つまり，ある有限の値に収束するような固有値列は存在しない．
4. 異なる固有値に対する固有空間は互いに直交する．

なので，以下の定義が意味を持ちます．

定義 3.0.2. M はコンパクト向き付きリーマン多様体とし，$\Delta_p : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ をラプラスベルトラミ作用素とし，$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ を Δ_p の固有値とする．実部が 1 より大きい複素数 s に対して，

$$\zeta_{\Delta_p}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}$$

と定める．

さて，以下が成立します．

定理 3.0.3. 実部が 1 より大きい複素数 s に対して，

$$\zeta_{\Delta_p}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta_p}) dt$$

が成立する．ただし，

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta_p}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n}$$

である．

実は右辺は $\mathbb{C}$ で有理型なので [5]，これによって $\zeta_{\Delta_p}(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続されます.$s = 0$ では正則なので，以下の定義が意味を持ちます．

定義 3.0.4.

$$T(M) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i i \zeta'_{\Delta_i}(0) \right)$$

とする．解析的トーションという.[*3]

次のことが知られています．[2]

[*3] 正確にはその特別な場合．一般にはベクトル束に値を持つ p-form 全体の上に定まるラプラスベルトラミ作用素についてこれは定義できる．

定理 3.0.5. $T(M)$ は M の計量の取り方によらない.

計量に強く依存していそうな量が実は計量の取り方にはよらない，というわけです．面白いですね.

4　複素多様体上での類似

さて，解析的トーションが導入されたのはほかならぬ [2] においてであったわけですが，[3] ではその複素多様体における類似が導入されています．以降 M は複素多様体，特にエルミート多様体であるとしましょう．リーマン多様体の時と同じく微分形式に作用するラプラスベルトラミ作用素が定義できるわけですが，ここで M は複素多様体ですから，ラプラスベルトラミ作用素は (p,q) 形式に作用するものと思えます．つまり，$\Delta_{p,q}$ と考えるべきです.
同様にしてこれの ζ 関数は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，結局次の定義は意味を持ちます.

定義 4.0.1.
$$T_p(M) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{\dim M}(-1)^q q\zeta'_{\Delta_{p,q}}(0)\right)$$
とする．解析的トーションという.

先ほど定義したものは計量の取り方によらなかったわけですが，実はこれは複素構造の取り方に依存します．つまり「複素構造全体の空間」の上の関数に持ち上がるわけですね.

5　おわりに

すぐ読めてお得！
... いやすいません，もう少しちゃんと書こうと思ったんですが，あまりにも知識不足でした.
なんか BCOV 不変量の片側の定義にこれが使われているみたいです．その話は後々... できるかなあ.

参考文献

[1] Milnor, John (1964), "Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds", Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 51 (4): 542ff

[2] D.B. Ray, I.M. Singer(1971),R-Torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds,Advances in Mathematics,Volume 7, Issue 2,1971,Pages 145-210,ISSN 0001-8708

[3] Ray, D. B., Singer, I. M. (1973). Analytic Torsion for Complex Manifolds. Annals of Mathematics, 98(1), 154-177.

[4] 本間 泰史 (2012),"２０１２年度　幾何学Ａ　多様体上の楕円型微分作用素 -Hodge theorem-", 講義ノート.

[5] Gilkey, P.B. (1994). Invariance Theory: The Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem (1st ed.). CRC Press.