とっても速いものについて

労作 X アカウント

2024 年 12 月 11 日

概要

Wathematica Advent Calender 2024 11 日目を担当する労作です.
時間遡行の可能性の一つとして提唱されていた虚粒子を用いる理論を紹介します.

第 I 部

はじめに

私たちが住むこの世界は,Einstein の相対性理論によると, 空間の 3 次元と時間の 1 次元を合わせた 4 次元の時空として記述されます. この理論によると物体は光の速度より速く動くことはないといいます. また物体の速度が光の速度に近づくにつれてその物体に流れる時間は遅くなり, 質量が増していくというのです. つまり, 世界には速度を支配する者ともいうべき存在がいるのです.

この支配者に対して反旗を翻してみませんか? 数多の実験結果と数学的論述に支持を受け成り立つこの支配に対しての反旗を. 物体の速度に上限などなく, 自由に動ける世界を夢見てみませんか. そこで革命の指導者として光速度を超える物体を, たとえ我々が認識できない存在だとしても, 仕立てましょう. 革命家にはふさわしい名前が必要ですからこれを**虚粒子 (タキオン;tachyon)** と呼称します. 革命の目的は, 光の速度に対する支配を打ち砕く, すなわち光速度より速いものがこの世界に存在することを相対論の文脈で示すことです.

この革命にたいしてどのような結末が待っているでしょうか. 結論としてはこの世界, 時空からの追放です. 具体的には我々の世界からでは観測できなくなるということです. そもそも上記の光による速度の支配は, 物理学的に妥当な過程を数学的に定式化した結果得られたものです. 数学からの絶大な支持を受けている支配者は, 例外の存在を許しません. 革命は失敗したため, 今までどおりの平和な世界, 物理学は続きます. よかった〜😮‍💨.

ではどのようにして虚粒子は世界から追放されたのか, その追放先はどこなのかを見ていきましょう. ここでは特殊相対論の範囲での力学を考え, 量子的な現象の表れない巨視的な範囲で対称を扱います. ここで, 我々の世界から見ると虚粒子は時間遡行するという話が出てきます.

本題に移るにあたって, このような記事を書く機会をくださった Wathematica Advent Calender 2024 の企画運営の方々, また平時より Wathematica の運営に携わっている方々に改めて感謝を伝えたい所存です. また, 筆者はまだ大学 1 年生であり, 浅学菲才な身の上であるため, 理論の誤りが散見されることと思います. これに対しては, 自信の身の糧にしたいく考えてるため, お手数おかけしますが上記した私の X(旧:Twitter) 等でお伝えしていただけると幸いです

第 II 部

特殊相対性理論

まず特殊相対性理論について考えます．これについては分かりやすい入門書等が数多く世に存在しているため, たとえば [1] の 11 章等を参考にしていただけると幸いです．ここでは 2,3 章で用いる範囲の特殊相対性理論について, 非常に簡潔にまとめます．なお初等的な集合, 線形代数の知識は既知としていますし, 別に読み飛ばしてもらってもかまいません．こちらは [2],[3] による説明を要約した形になるので, より深く知りたいと思った方はそちらを参照してください．

1　Minkowski 空間

本章では一般的に知られている Minkowski 空間の導入をします．定義ばかりになりますが仕方のないことですから... 以下では $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$(実数全体の集合) または $\mathbb{C}$(複素数全体の集合) として扱います．

[定義 1.1](vector 空間)
以下の性質 (1),(2) をもつ集合 V を $\mathbb{K}$ 上の **vector 空間**といい, その元を **vector** という．$\mathbb{K}$ を vector 空間 V の**係数体**といい, その元を **scalar** という．

(1) 任意の V の元 u,v に対して V の元 u+v(これを u と v の和という) がただ 1 つ定まり, 次の (1.1)∼(1.4) をみたす．組 (u,v) と u+v を対応させる演算のことを加法という．

(1.1)(交換法則) 任意の V の元 u,v に対し

$$u+v=v+u$$

(1.2)(結合法則) 任意の V の元 u,v,w に対し

$$u+(v+w)=(u+v)+w$$

(1.3)(零 vecter の存在) ある元 $0_V \in V$ が存在し, 任意の V の元 u に対し

$$u+0_v=u$$

(ここで定めた $0_V \in V$ を零 vecter という.)

(1.4)(逆 vecter の存在) 任意の V の元 u に対してある V の元-u が存在し

$$u+(-u)=0_V$$

(ここで u に対して定めた $-u \in V$ を u の逆 vecter という.)

(2) 任意の V の元 u と任意の $\mathbb{K}$ の元 α に対して V の元 αu(これを u の α 倍という) がただ 1 つ定まり, 次の (2.1)∼(2.3) をみたす．組 (α,u) と αu を対応させる演算を scalar 倍という．

(2.1)(scalar の結合法則) 任意の V の元 u と任意の $\mathbb{K}$ の元 α,β に対し

$$\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$$

(2.2)(scalar 倍の単位元の存在) ある $\mathbb{K}$ の元 1 が存在し, 任意の V の元 u に対し

$$1u=u$$

(2.3)(分配法則) 任意の V の元 u,v と任意の $\mathbb{K}$ の元 α, β に対し

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \beta v$$
$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$

ここで定めた vector 空間には vector を平行移動しても性質が変わらないという幾何学的な要請が反映されていないので, それを次で定義しましょう. (例 1.1)$n \in \mathbb{N}$ とし,$\mathbb{K}$ の n 個の直積集合

$$\mathbb{K}^n \coloneqq \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

は $\mathbb{K}$ 上の vector 空間になる.

[定義 1.2](affine 空間)

$\mathcal{A}$ を空でない集合,V を $\mathbb{K}$ 上の vector 空間とする. V の各元 u に対して, 写像 $T_u : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ が定義されていて, 以下の条件 (A.1),(A.2) を満たされるとき,$\mathcal{A}$ を **affine 空間**,V をその**基準 vector 空間**という.

(A.1) 任意の $u, v \in V$ に対し

$$T_u \circ T_v = T_{u+v}$$

(A.2) 任意の $P, Q \in \mathcal{A}$ に対してある vector $u \in V$ が唯一存在し,

$$T_u(P) = Q$$

affine 空間を定めたことでよい性質が得られたので, 今度は各元に対して性質を加えていきましょう.

[定義 1.3](計量)

V を $\mathbb{K}$ 上の vector 空間とする. 写像 $g : V \times V \to \mathbb{K}$ が以下の条件 (g.1)∼(g.3) を満たすとき,g を V 上の**計量**という.

(g.1)(線形性) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と任意の $u, v, w \in V$ に対して V の元

$$g(w, \alpha u + \beta v) = \alpha g(w, u) + \beta g(w, v)$$

(g.2)(対称性) 任意の $u, v \in V$ に対し

$$g(u, v)^* = g(v, u)$$

(ここで $(-)^*$ は $(-)$ の複素共役)

(g.3)(非退化性)

$$\{v \in V | g(u, v) = 0, u \in V\} = \{0\}$$

計量 g をもつ,$\mathbb{K}$ 上の vector 空間 V を $\mathbb{K}$ 上の**計量 vector 空間** (V,g) という. また各 vector $u \in V$ に対し

$$||u||_V \coloneqq \sqrt{|g(u, u)}$$

を vector u の norm という.

これらの定義したものから, 特殊な場合として特殊相対論で取り扱う Minkowski 空間について定めましょう.

[定義 1.4](Minkowski vector 空間)

(n+1) 次の行列 $\eta = (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,\cdots,n}$ を次のように定義する.

$$\eta_{\mu\nu} \coloneqq \begin{cases} 1 & \mu{=}\nu{=}0 \text{ のとき}, \\ -1 & \mu{=}\nu{=}1, 2, \cdots, n \text{のとき} \\ 0 & \mu{\neq}\nu \text{ のとき}. \end{cases}$$

(V,g) を (n+1) 次元実計量 vector 空間とする.V の基底 $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ で $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}, (\mu, \nu = 0, 1, \cdots, n)$ となるものが存在するとき,(V,g) を **(n+1) 次元 Minkowski vector 空間**という.

[**定義 1.5**](Minkowski 空間)

(n+1) 次元 Minkowski vector 空間を基準 vector 空間とする (n+1) 次元 affine 空間を **(n+1) 次元 Minkowski 空間** $\mathbb{M}^{n+1}$ という.

2 特殊相対性理論概説

特殊相対性理論では以下の公理 (R.1)~(R.3) のもと議論をしていきましょう. 普段見慣れない公理だと思われますが, 本質的には同じことをいっています. また, 公理 (R.3) で表れる tensor を定義していませんが, この公理はあまり使わないので大丈夫でしょう.

公理 (R.1) 質点の運動は,4 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{M}$ 内の曲線によって表せる.(これを**運動曲線**または**世界線**という).

公理 (R.2) 速さの次元をもつ物理定数 $c > 0$ が存在する.

公理 (R.3) 物理量は Minkowski vector 空間における tensor 量 (scalar,vector 量を含む) であって, 基本法則は tensor に関する方程式で表される.

なぜ 4 次元空間を扱い, 更に不定計量を導入したのかについては, 電磁気学の文脈から答えが与えられます. 一言で言うなら,Maxwell 方程式の解として現れる電磁波の速度が定数となることと座標系によらず物理法則が成り立つ仮定との整合性をとるためです. またこれに関連して, 公理 (R.2) であらわれる物理定数 c は光速度と結果的に一致します.

affine 空間としての Minkowski 空間 $\mathbb{M}$ の中に 1 点を定め, これを平行移動により基準 vector 空間 V_M の原点と一致させます. 公理 (R.1) で定めた世界線を,

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to V_M ; s \mapsto \gamma(s)$$

として,γ は単射かつ連続微分可能で, 逆写像 γ^{-1} も連続微分可能であるとします. この曲線の像を $\mathit{\Gamma}$ とします. すなわち,

$$\mathit{\Gamma} = \{\gamma(s) | s \in [\alpha, \beta]\}$$

この曲線の接 vector は

$$\dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$$

で与えられます. ここで s は次元を持たないただのパラメータであることに留意してください. では,Minkowski 空間と物理現象との関係をみていきましょう.

[**定義 2.1**](Lorentz 座標系)

4 次元 Minkowski 空間の基準 vector 空間の基底 $(\bar{e}_\mu)_{\mu=0}^3$ が $g(\bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu) = \langle \bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu \rangle_{V_M} = \eta_{\mu\nu}$ $(\mu\nu = 0, 1, 2, 3)$ を満たすとき, これを V_M の **Lorentz 基底**という. Lorentz 基底から定まる座標系 $(V_M ; (\bar(e)_\mu)_{\mu=0}^3)$ を **Lorentz 座標系**という.

[**定義 2.2**](座標時間, 空間座標)

Lorentz 座標系 $(\bar{e}_\mu)_\mu$ を任意にとり,$x \in V_M$ をこの基底で表現する.

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} \bar{x}^\mu \bar{e}_\mu$$

このとき点 x が質点の運動を表すことから各成分 $\bar{x}^\mu$ は長さの次元を持つとする．$(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ を Lorentz 座標系 $(\bar{e}_\mu)_{mu}$ における**空間座標**という．また公理 (R.2) により $\bar{t} \coloneqq \frac{\bar{x}^0}{c}$ は時間の次元をもつため, この $\bar{t}$ を Lorentz 座標系 $(\bar{e}_\mu)_\mu$ における**座標時間**という．

座標時間を導入することで光速度 c の特異さを見ることができます．そのために世界線を座標時間を用いて表しましょう．

任意の Lorentz 座標系 $(\bar{e}_\mu)_\mu$ で世界線 γ 上の任意の点 $\gamma(s) \in V_M$ は

$$\gamma(s) = cf(s)e_0 + \sum_{i=1}^{3} x^i(s)e_i$$

と表せる．γ の単射性により関数 $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は単射であるためその逆写像 f^{-1} が存在する．

$$\eta(t) \coloneqq \gamma(f^{-1}(t)), (t \in f([\alpha, \beta]))$$

とすると,η は座標時間をパラメータとする世界線の表示を与える．これを上式を用いて表すと,

$$\eta = cte_0 + \sum_{i=1}^{3} \eta^i(t)e_i,\ (\eta^i(t) \coloneqq x^i(f^{-1}(t)))$$

となる. 最後に η を γ と書きかえると,

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{3} \gamma^j(t)e_j$$

となり, 世界線を座標時間を用いて表せた.

ここで定まった $\gamma^j(t)$ に対して,$(\dot{\gamma}^1(t), \dot{\gamma}^2(t), \dot{\gamma}^3(t))$ を Lorentz 座標系 (e_μ) における **3 次元的速度** $\sqrt{\sum_{j=!}^{3} \dot{\gamma}^j(t)^2}$ を **3 次元的速さ**と定めます．すると面白いことに光の速さに対して 3 次元的速さが十分遅い質点の運動の速さは 3 次元的速さと一致します．あまり面白くないですかね. 次にこの記事の本題ともいえる時間に関して考えます.

[定義 2.3](Minkowski 的長さ, 固有時)
曲線 $\mathit{\Gamma}$ から定まる以下の, 長さの次元を持つ scalar 量 $L(\mathit{\Gamma})$ を **Minkowski 的長さ**という.

$$L(\mathit{\Gamma}) \coloneqq \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle_{V_M}}\, ds = \int_\alpha^\beta ||\dot{\gamma}(s)||_{V_M}\, ds$$

これを光速で割った量は時間の次元を持つためこれを**固有時** $\tau(\mathit{\Gamma})$ という.

$$\tau(\mathit{\Gamma}) \coloneqq \frac{1}{c} L(\mathit{\Gamma}) = \frac{1}{c} \int_\alpha^\beta ||\dot{\gamma}(s)||_{V_M}\, dx$$

3 次元的速度が 0 のとき, すなわち質点が静止しているときには固有時は普段我々が体感して, 他者と共有していると感じている時間間隔と一致します．これより固有時を考えることはその質点に流れる時間間隔を考えることと一致すると考えましょう．ここで未来と過去について考えます．点 A が原点に対して未来にあるとは点 A の Lorentz 座標の e_0 成分が正であるとします．同様に点 A が原点に対して過去にあるとは点 A の Lorentz 座標の e_0 成分が負であるとして, 点 A が原点に対して同時にあるとは点 A の Lorentz 座標の e_0 成分が 0 であるとします．Minkowski 空間は affine 空間なのでこれで各点に対して過去, 未来, 同時を定義できます．この定義の妥当性はよいでしょう.

その他,4 次元特有の現象は多くありますが省略します. この部分で通常の質点の 3 次元的速度は光速度を越えられないことの説明が出てきますが, 疲れたでしょう？ はやく本題の虚粒子について考えましょう.

第 III 部
虚粒子の運動

いよいよ虚粒子について考えます. 虚粒子には様々な性質がありますがこの記事ではその速さのみに着目して, そこから説明される興味深い現象について考えます.

3 虚粒子の定義とその性質

[**定義 3.1**](虚粒子)
質点の世界線 $\gamma : [\alpha, \beta] \to V_M$ の接 vector が

$$\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle_{V_M} < 0$$

を常に満たすとき, この質点を**虚粒子**または**タキオン:tachyon** という. また同様に, ある質点の世界線 γ の接 vector が

$$\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle_{V_M} \geq 0$$

を常に満たすとき, この質点を**実粒子**または**ブラディオン:bradyon**

定義の条件は何を意味するかというと虚粒子の 3 次元的速度が光速度よりも大きいことを意味します. 実際に世界線を

$$\gamma(t) = cte_0 + \sum_{j=1}^{3} \gamma^j(t) e_j$$

としてこれを座標時間で微分すると

$$\dot{\gamma}(t) = ce_0 + \sum_{j=1}^{3} \dot{\gamma}^j(t) e_j$$

であるから

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = c^2 - \sum_{j=1}^{3} \dot{\gamma}^j(t)^2 < 0$$

よって

$$c < \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \dot{\gamma}^j(t)^2}$$

となるからです.

虚粒子には面白い性質が多くあります. 静止ができないことに始まり, 質量が純虚数であること, エネルギーを加えると 3 次元速度が小さくなることなどです. 質量が正の値をとらないことにより, 虚粒子を直接観測することはできません. 速すぎるだけでこのような性質が出てくるのは面白いですね.

4　虚粒子の時間遡行

この話が一番書きたかった😭😭😭 ですが, 後半は自身の解釈が含まれるので正確性が減少します．このあたりの話はあまり書いている文献が見つけられなかったのですが,[4] には同様の図が載っているのでそちらを参照するとよいと思います．ここでは真空を仮定し, 虚粒子が情報を持てると仮定します．4 次元 Minkowski 空間上に静止している 2 点 A,B をとり,Minkowski 空間を affine 空間としてみることで, 点 A を基準 vector 空間の原点と一致させます．また点 B は, 点 A と点 B を結ぶ曲線 $\gamma : [0,t] \to V_M$ の接 vecter が $\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle_{V_M} < 0$ を常に満たすようにとります．これを簡単のために,Lorentz 座標系 $(e_\mu)_\mu$ を用いて,

$$\gamma(s) = ase_1$$

とすると点 B の Lorentz 座標は $(0, at, 0, 0)$ となります.2 次元の図にすると以下のようになるでしょう (図１). 次に, この空間的に離れた 2 点で点 A から点 B に通信することを考えましょう．まず通信経路を作りま

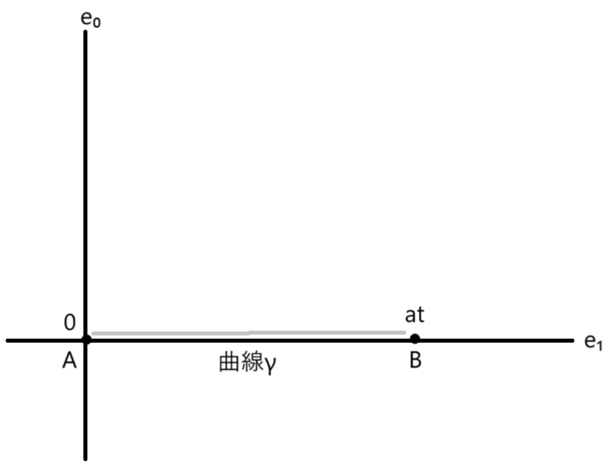


図１　2 点 A,B の概観

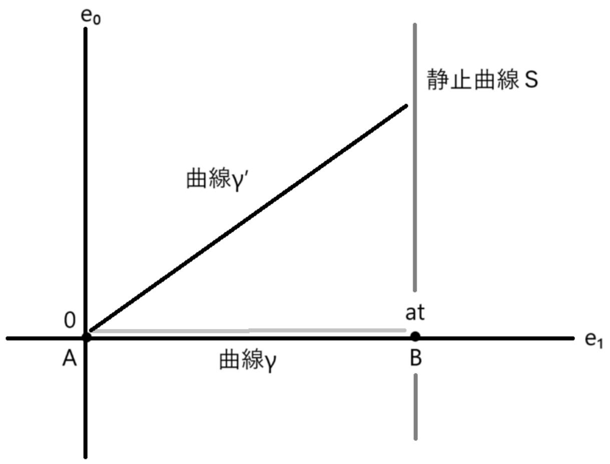
す．ここで通信経路を作るとは,” 点 A から出たある曲線を, 点 B が静止していることから自然に考えられる曲線 (静止曲線)S と交点をもつように作ること” として, 通信回路とはこの曲線を意味するとします．後の質点の議論の時に実粒子の中で最速であるものを考えたいため, $\langle \dot{\gamma}'(s'), \dot{\gamma}'(s') \rangle_{V_M} = 0$ となる曲線 $\gamma' : [0, t'] \to V_M$ を考え, これを簡単のために

$$\gamma'(s') = cs'e_0 + cs'e_1$$

とすると, これは以下の図のようになるでしょう (図２).

さて, ここでそれぞれの曲線の固有時を求めてみましょう．まず曲線 γ の固有時 $\tau(\Gamma)$ は

$$\begin{aligned}\tau(\Gamma) &= \frac{1}{c}\int_0^t ||\dot{\gamma}(s)||_{V_M}\, ds \\ &= \frac{1}{c}\int_0^t ai\, ds \\ &= \frac{1}{c}ait\end{aligned}$$



となります．ここで i は虚数単位です．なにかおかしいですね．とりあえず続けましょう．同様に曲線 γ' の固有時 $\tau(\Gamma')$ は

$$\begin{aligned}\tau(\Gamma') &= \frac{1}{c}\int_0^{t'} ||\dot{\gamma}'(s')||_{V_M}\, ds \\ &= \frac{1}{c}\int_0^{t'} 0\, ds \\ &= 0\end{aligned}$$

となります．

困りました. 曲線 γ の固有時が虚数となってしまったため, 固有時の大小の比較, すなわち時間の進み方の検討ができません．曲線 γ' の固有時は 0 となったため, こちらは時間が流れないと解釈できますが ....

この議論は無視して, 一旦通信の話に戻ります．では通信を行いましょう．ここで通信を行うとは, 質点が通信経路を世界線として運動を行うこととします．曲線 γ を世界線とする質点は虚粒子となり, 曲線 γ' を世界線とする質点は実粒子となります．各質点はそれぞれの世界線に沿って運動して点 B の静止曲線 S の上にのります．それぞれの交点を考えると,γ との交点 C は $(0, at, 0, 0)$ となり,γ' との交点 C' は $(at, at, 0, 0)$ となります．面白いことに, 点 C' を原点として平行移動させるとわかるように, 点 C は点 C' に対して過去にあります. 曲線 $\gamma 7$ を世界線とする質点は 3 次元的速さが光の速さと一致するため, 観測できるうえでこれ以上 3 次元的に速い実粒子は存在しないため, この世界線が我々が認識できる世界を, 現在を規定していると考えられます. 点 B にとってはこの世界線を通ってくる質点が届くまで, 点 A からの情報を知ることはできません．しかしながら, 虚粒子を考えると, 点 B が最速で点 A からの情報を知ったとしても, それよりも先に虚粒子から点 A の情報を知ることができます．つまり虚粒子は未来の情報を伝えることができるのです．これはまさに, 虚粒子が時間跳躍をしてるといえるのではないでしょうか．少し異なるでしょうが, これが虚粒子をもちいた時間跳躍の実現となります.

第 IV 部
おわりに

はじめにで述べた問いについて答えをまとめましょう．光速度より速い虚粒子は, 虚数の質量をもち直接観測ができないことから, 我々が住む世界とは少し異なる場所にいることがわかります．これがはじめにで述べた, 現実世界からの追放の意味するところです．かわいそうに😢.

ではもう 1 つ問いとして用意していた, 虚粒子の追放先とはどこでしょうか．私の考えを述べます (完全に妄想ですので, もし既出だった場合はそちらを参考にしてください)．虚粒子は虚数の質量をもち, 虚数の固有時をもちます．3 次元速度の下限が光速度で, エネルギーを加えると 3 次元速度が小さくなることから,3 次元速度が無限大のときエネルギー的に安定しているととらえられます．実粒子はご存じの通り実数の質量をもち, 実数の固有時をもちます．3 次元速度が 0 の時にエネルギー的に安定で,3 次元速度の上限が光速度です．

ここでかなり強引な考えを展開します．実粒子の速さを v_R とすると, これは

$$0 < v_R < c$$

を満たします．ここで c の次元を保ったまま, その値が 1 となるように両辺を割ると,

$$0 < v'_R < 1$$

となります．ここで次元を含めて全体の逆数をとり,$\frac{1}{0} = \infty$ となるように対応づけると,

$$1 < \frac{1}{v'_R} < \infty$$

となります. こんな乱暴な議論から強引に意味を引っ張り出すと, この不等式の端の値をみると, 虚粒子の性質と少し似ています．似ていない点はその次元が速度の逆数となっていることです．

ではこう考えてはどうでしょうか．虚粒子は時間を空間のように移動し, 空間を時間のように受け入れていると．なんて大胆なんでしょう．ですが興味深いとは思いませんか? 空間的な次元は 3 次元なのに時間的な次元は 1 次元なのです．なぜ時間は 1 次元でなくてはいけないのでしょうか．逆に, なぜ空間は 1 次元ではないのでしょうか．時間も 3 次元とするとどんな結論がでてくるのでしょうか．ここで虚数との関係がでてきたら嬉しいですねぇ.

あとがき

最後まで読んでくださりありがとうございました．ほんとに失礼なぐらい読みにくい記事だと思われます．必要な情報を飛ばしたり, 数式のレイアウトが変だったり思われましたかね．参考文献に挙げたものは素晴らしいので興味が出てきたらぜひ読んでみてください．全体的に古いですが．締め切り前に急いで書き上げているもので . . . すいません．私自身, 数理物理を今は勉強しているのですが, モチベとしてはさいごにで述べたような突拍子もない仮定を, 数学でぶん殴って形を整えて納得できる形にしたいからなんですよね．きっとそれは楽しいことだとおもいます．ですがそれにしては知らないことが多いのが難点です．たとえば, 現在ではタキオンという言葉は, タキオン場というもので使われているようですが, 場の理論は私はまだ何も知らないです．もしかしたら, さいごにで述べたことがすでにその文脈で定式化されているかもしれません．それはそれで楽しいですけどね．Wathematica Advent Calender 2024 の 11 日目担当として, まぁまぁな感じになっていたら幸いです．ほかにすごい記事がたくさんあるので, そっちもみろよな👏👏👏‼‼ 以上, 労作でした.

第 V 部
参考文献

[1] 砂川重信. 理論電磁気学 第 3 版. 紀伊国屋書店,1999

[2] 新井朝雄. 物理現象の数学的諸原理 初版. 共立出版,2003

[3] 新井朝雄. 相対性理論の数理 初版. 日本評論社,2021

[4] 都筑卓司. 新装版 タイムマシンの話 超光速粒子とメタ相対論 初版. 講談社,2002

[5] 大貫義郎. ポアンカレ群と波動方程式 第 3 版. 岩波書店,1986

[6]P.C.W. デイビス著, 戸田盛和, 田中裕訳. 時間の物理学 —その非対称性— 初版. 培風館,1979

[7]Erasmo Recami.How to Recover Causality in Special Relativity for Tachyon.Foundations of physics vol 8,1978

あと, 自分の推しを載せるといいことがあるそうなので, 足立レイをどうぞ.