普遍性

yoshino[*]

2024 年 12 月 22 日

概要

様々な数学的構成は普遍性によって定めることができます。以下では、初歩的な代数学に慣れているが圏論に触れたことのない読者を対象に、普遍性という概念とその使い方を紹介します。具体例として可換環論から加群のテンソル積、剰余環、環の局所化などを紹介します。この記事は Wathematica advent calendar 2024[*1] に参加しています。

1　モチベーション

多くの人は線形空間のテンソル積の定義で普遍写像性質というものに出会い、困惑します。テンソル積の普遍写像性質は、今回のテーマである普遍性の一種です。可換環上の加群のテンソル積の場合で復習しておきましょう。詳しくは線形代数や代数学の本 [池田 22, 世界, 層ホモ, 永井] を見てください。

定義 1. 可換環 A 上の加群 N と M の A 上テンソル積とは、A 加群 $N \otimes_A M$ と A 双線形写像 $\otimes : N \times M \to N \otimes_A M$ で、次の普遍写像性質を満たすもののこととする。

- 任意の A 加群 T と任意の A 双線形写像 $\Phi : N \times M \to T$ に対して、次を可換にする A 線形写像 $\varphi : N \otimes_A M \to T$ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd} N \times N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\otimes"'] & T \\ N \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

この定義を満たすテンソル積が存在すれば一意に定まることは次のように確かめられたのでした。

---

[*] @yoshino_no_no_n

[*1] `https://wathematica-adv-2024.vercel.app/`

命題 2. 二つの A 双線形写像 $\otimes : N \times M \to N \otimes_A M$ と $\otimes' : N \times M \to N \otimes'_A M$ が共に N と M の A 上テンソル積であるとき、次を可換にする A 加群の同型 $\varphi : N \otimes_A M \to N \otimes'_A M$ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, "\otimes"'] & N \otimes'_A M \\
N \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\sim" sloped, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

証明. 次のような図式を考えます。

$$\begin{tikzcd}
& N \times N \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[dl, "\otimes'"'] \arrow[d, "\otimes"'] & N \otimes'_A M \\
N \otimes'_A M \arrow[r, dashed, "\psi"'] & N \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

ただし、φ は $\otimes'$ が双線形であることと $\otimes$ の普遍写像性質から一意に存在する A 加群準同型で、ψ は $\otimes$ が双線形であることと $\otimes'$ の普遍写像性質から一意に存在する A 加群準同型です。二つの三角形が可換であることから

$$\begin{tikzcd}
& N \times N \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[dl, "\otimes'"'] & N \otimes'_A M \\
N \otimes'_A M \arrow[urr, bend right, "\varphi \circ \psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

も可換です。一方

$$\begin{tikzcd}
& N \times N \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[dl, "\otimes'"'] & N \otimes'_A M \\
N \otimes'_A M \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_{N \otimes'_A M}"'] & &
\end{tikzcd}$$

は自明に可換です。$\otimes'$ が双線形であることと $\otimes'$ の普遍写像性質の一意性から $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{N \otimes'_A M}$ であることがわかります。

　同様に

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[d, "\otimes'"] & N \otimes_A M \\
N \otimes_A M \arrow[r, "\varphi"'] & N \otimes'_A M \arrow[ur, dashed, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする ψ' が一意に存在して、$\psi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{N \otimes_A M}$ を満たします。

$$\psi = \psi' \circ \varphi \circ \psi = \psi'$$

となるため、φ が同型であることがわかります。 □

実は剰余環も同様の普遍性を持っています。証明は環の準同型定理と同様なので省略します。

命題 3. I を可換環 A のイデアルとする。剰余環 A/I は次の普遍写像性質を持っている。

- 任意の可換環 B と任意の $I \subset \mathrm{Ker} f$ を満たす環準同型 $f : A \to B$ に対して、次を可換にする環準同型 $\tilde{f} : A/I \to B$ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & B \\
A/I \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

命題 2 とまったく同様にして、次の定義で剰余環が一意に定まっていることを示すことができます。

定義 4. I を可換環 A のイデアルとする。剰余環 A/I とは、命題 3 の普遍写像性質を満たす環準同型 $\pi : A \to A/I$ のこととする。

定義 1 と定義 4 の類似、命題 2 と命題 3 の類似を統一的に扱うためにはどうすればよいでしょうか。二つの普遍写像性質はどちらも、任意の対象[*2]への準同型が、別の情報[*3]から一意に定まるという形をしています。この任意の対象との関係を考えるということが、圏論の基本です。そのためには「任意の対象」として何を考えるのかを明確にする必要があります。これが圏です。また、一意に定まるということは集合の間の全単射で記述されるため、関手と自然変換によって話を集合のなす圏に移す必要があります。次節でこれらの概念を定義しましょう。

[*2] これは「任意のほかの対象」ではありません。命題 2 の証明で自身への準同型が一意に決まるということが本質的な活躍をしていたことを思い出してください。

[*3] 命題 2 では $N \times M$ からの双線形写像、命題 3 では条件を満たす A からの環準同型のことです。

2　圏論の基本事項

圏論の基本的な概念である圏、関手、自然変換の定義と性質を簡単に述べます。ここでは後で必要なことしか書いていないので、詳しくは [Context, 層ホモ, 壱大整域, 原論] などを見てください。次節以降で具体例をたくさん見るので、今は定義を飲み込んでください。まずは圏の定義です。

定義 5. 圏 $\mathbf{C}$ とは以下のデータ[*4]

1. 対象のあつまり[*5]$\mathrm{Ob}\mathbf{C}$
2. 二つの対象 $x, y \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して x から y への射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$
3. 二本の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y, z)$ に対してその合成 $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, z)$
4. 対象 $x \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して恒等射 $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, x)$

であって次を満たすもののこととする。

1. 射の合成が結合的である。つまり、$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ。
2. 恒等射が射の合成で単位的に振る舞う。つまり、$\mathrm{id}_y \circ f = f \circ \mathrm{id}_x = f$ が成り立つ。

注意 6. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ の代わりに単に $f : x \to y$ と書くことがあります。どの圏における射なのかが明示されていないですが、明らかな場合がほとんどです。

圏の例として、基本的なものをいくつかあげます。

例 7.
1. 圏 $\mathbf{Ab}$ を、$\mathrm{Ob}\mathbf{Ab}$ はアーベル群全体のあつまり、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G, H)$ はアーベル群準同型全体の集合、射の合成は準同型写像の合成、恒等射は恒等写像として定めます。
2. A を可換環とします。圏 A-$\mathbf{mod}$ を、$\mathrm{Ob}A$-$\mathbf{mod}$ は A 加群全体のあつまり、$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N, M)$ は A 加群準同型全体の集合、射の合成は準同型写像の合成、恒等射は恒等写像として定めます。
3. 圏 $\mathbf{CRing}$ を、$\mathrm{Ob}\mathbf{CRing}$ は可換環全体のあつまり、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, B)$ は可換環準同型全体の集合、射の合成は準同型写像の合成、恒等射は恒等写像として定めます。
4. 圏 $\mathbf{Set}$ を、$\mathrm{Ob}\mathbf{Set}$ は集合全体のあつまり[*6]、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ は写像全体の集合、射の合成は写像の合成、恒等射は恒等写像として定めます。

ここでは射や合成や恒等射を明示しましたが、明らかな場合はしないことが多いです。以下でもしない箇所がいくつかあります。また、結合性と恒等射の単位性を確かめないといけません。

[*4] データという言葉は、もの（いまの場合は圏）を具体的に作るときに与える情報と、満たすべき条件を分けるために使っています。圏論ではよくある言葉遣いなので、見慣れないかもしれないですがあえて使います。

[*5] なぜ集合でないのかはここでは気にしないことにします。

[*6] ラッセルのパラドックスを知っている人は、$\mathrm{Ob}\mathbf{Set}$ を集合としたらまずいことがわかると思います。これが Ob を集合としなかった理由です。同様の理由でこの例であげた他の 3 つの圏も Ob は集合ではありません。この種の問題は今回は無視します。

演習 8. 例 7 で結合性と単位性を確かめよ。

元の概念での定義や定理が一般化された概念でうまくいくか考えることは一般化の基本です。圏は例 7 で上げたような圏の一般化という側面もあるので、次のような定義は自然です。

定義 9. 射 $f : x \to y$ は

$$g \circ f = \mathrm{id}_x, \quad f \circ g = \mathrm{id}_y$$

をみたす射 $g : y \to x$ があるとき、同型と呼ばれる。

例 10. 例 7 の 1 から 3 までの圏では通常の意味での同型と上の定義は一致します。**Set** での同型は全単射写像と一致します。

次の例は基本的ですが、今回はそれほど使いません。ここでもデータは明示しますが、条件を満たすことを確かめることは省略します。

定義 11. $\mathbf{C}$ を圏とする。$\mathbf{C}$ の反対圏[*7]$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ を次のように定める。対象は $\mathrm{Ob}\mathbf{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}\mathbf{C}$、射は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y, x)$、合成は $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y, x), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(y, z) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(z, y)$ に対してその合成を $\mathbf{C}$ における合成 $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(x, z) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(z, x)$、恒等射は $\mathbf{C}$ と同じとする。

次に共変関手の定義をします。

定義 12. 圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への共変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは、以下のデータ

1. $\mathbf{C}$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して $\mathbf{D}$ の対象 $Fc \in \mathrm{Ob}\mathbf{D}$
2. $\mathbf{C}$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ に対して $\mathbf{D}$ における射 $Ff \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fx, Fy)$

であって次を満たすもののこととする。

1. 射の合成を保つ。つまり $Fg \circ Ff = F(g \circ f)$ が成り立つ。
2. 恒等射を保つ。つまり $F\mathrm{id}_x = \mathrm{id}_{Fx}$ が成り立つ。

注意 13. 共変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ の持つデータを表すときに、以下では次のような図を使います。

$$\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\
c' & Fc'
\end{tikzcd}$$

[*7] 双対圏とも呼ばれます。$\mathbf{C}^{\circ}$ と書かれることもあります。

例 14. 共変関手 $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を、アーベル群 G に対して UG は演算を忘れた集合 G、群準同型 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G,H)$ に対して $Uf \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(G,H)$ は f と同じ写像として定めましょう。図で描くと次のようになります。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Ab} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \\
\hline
G & & G \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
H & & H
\end{array}
$$

同様に共変関手 $U : A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Set}$ や $U : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Set}$ や $U : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Ab}$ も定義できます。

次の例は普遍性について述べるとき非常に重要です。

例 15. $\mathbf{C}$ を圏とし、x を $\mathbf{C}$ の対象とします。共変関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ を次のように定めます。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
\hline
c & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c) \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
c' & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c')
\end{array}
$$

ただし $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c')$ は f を後から合成する写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c') \\
\varphi & \longmapsto & f \circ \varphi
\end{array}
$$

で定めます。

反変関手の定義をします。

定義 16. 圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への反変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは、以下のデータ

1. $\mathbf{C}$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して $\mathbf{D}$ の対象 $Fc \in \mathrm{Ob}\mathbf{D}$
2. $\mathbf{C}$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,y)$ に対して $\mathbf{D}$ における反対向きの射 $Ff \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fy,Fx)$

であって次を満たすもののこととする。

1. 射の合成を保つ。つまり $Ff \circ Fg = F(g \circ f)$ が成り立つ。
2. 恒等射を保つ。つまり $F\mathrm{id}_x = \mathrm{id}_{Fx}$ が成り立つ。

注意 17.

1. 共変関手の定義とはデータの 2 と条件の 1 が違います。F が射の向きを変えるため、条件 1 における合成は定義されています。
2. 反変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ の持っているデータは次のような図で表せます。射の向きに注意してください。

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \\ \hline \begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Fc \\ c' & Fc' \arrow[u, "Ff"'] \end{tikzcd} \end{array}$$

3. 反変関手は反対圏からの共変関手とみなせます。つまり、反変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を与えることは共変関手 $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$ を与えることと同じです。図で描くとよくわかります。右が反変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ で、左が共変関手 $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$ です。

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \\ \hline \begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Fc \\ c' & Fc' \arrow[u, "Ff"'] \end{tikzcd} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \\ \hline \begin{tikzcd} c' \arrow[d, "f"'] & Fc' \arrow[d, "Ff"] \\ c & Fc \end{tikzcd} \end{array}$$

4. 単に関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ と書いたら共変関手

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \\ \hline \begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\ c' & Fc' \end{tikzcd} \end{array}$$

のことなのか反変関手

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \hline c & & Fc \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle Ff} \\ c' & & Fc' \end{array}$$

のことなのかがわかりません。そこでここでは共変でも反変でも構わないときにのみ関手という言葉を使うことにします。ただし、一般的には関手と言えば共変関手のことを指すことが普通です。その場合「反変関手 $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$」と書いて

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \hline c & & Fc \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle Ff} \\ c' & & Fc' \end{array}$$

を表すことがあります。ここで使っている用語と逆になってしまうので、注意してください。今回は共変関手と反変関手の間に優劣はないということを強調するために、この記法を採用しました。

例 18. 反変関手 $()^* : A\text{-}\mathbf{mod} \to A\text{-}\mathbf{mod}$ を

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathbf{mod} & \longrightarrow & A\text{-}\mathbf{mod} \\ \hline N & & N^* \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle f^*} \\ M & & M^* \end{array}$$

で定めます。ただし M^* は双対加群 $\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(M, A)$ を表し、f^* は準同型

$$\begin{array}{ccc} N^* & \xrightarrow{f^*} & M^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

を表します。A が体のとき、これは線形空間の双対空間を与える関手です。

例 19. $\mathbf{C}$ を圏とし、x を $\mathbf{C}$ の対象とします。反変関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,x) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ を次のように定めます。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,x) \\ c' & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c',x) \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

ただし $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c',x) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,x)$ は f を前から合成する写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c',x) &\xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,x) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

で定めます。これは例 15 の双対[*8]になっています。

注意 20. 形はよく似ていますが、この関手は $\mathbf{Set}$ への関手ですから、例 18 の関手がこの関手の特別な場合というわけではありません。例 18 のように Hom が $\mathbf{Set}$ ではない圏に値をとるような圏（今回与えた定義での圏ではないですが）は豊穣圏として定式化されています。

次が三つ目の基本的な定義です。

定義 21.

1. 二つの共変関手 $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ に対して F から G への自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G$[*9]とは、次のデータ
   - $\mathbf{C}$ の対象 $c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して $\mathbf{D}$ における射 $\alpha_c : Fc \to Gc$

   であって、任意の $\mathbf{C}$ における射 $f : c \to c'$ が次を可換にするもののこととする。

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd}$$

2. 二つの反変関手 $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ に対して F から G への自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G$ とは、次のデータ
   - $\mathbf{C}$ の対象 $c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して $\mathbf{D}$ における射 $\alpha_c : Fc \to Gc$

[*8] 双対という言葉は雰囲気で使っています。

[*9] 自然変換は二重の矢印で書くことが多いです。

であって、任意の $\mathbf{C}$ における射 $f : c \to c'$ が次を可換にするもののこととする。

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] & Gc \\ Fc' \arrow[u, "Ff"] \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Gc' \arrow[u, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

注意 22. $\mathrm{Ob}\mathbf{C}$ で添え字ついた射の族 $(\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}}$ が自然変換をなすことを、α_c が c について自然であるとも言います。これは次のように説明できます。共変の場合で説明しますが反変でもまったく同様です。自然変換の条件

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd}$$

は α_c を任意の $f : c \to c'$ で「動かせる」ことを表しています。これが個々の c に依存せずに、つまり自然に、α_c が定まっていることを保証していると思えば、α_c が c について自然であると言う気持ちもわかるでしょう。この可換性ひとつ[*10]でたくさん強い結果が言えるということは圏論の驚くべきことのひとつです。

後で使う用語を今定義します。

定義 23. すべての α_c が同型の時、自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G$ を自然同型と呼び、$\alpha : F \cong G$ と書く。[*11]

次は非常に重要な例です。

例 24. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ とします。共変関手の間の自然変換 $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, -)$ を次のように定めます。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y, c) & \xrightarrow{(f^*)_c} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, c) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

これが自然変換を定めていることを確かめるには、任意の $\mathbf{C}$ における射 $g : c \to c'$ に対して次の図式の可換性を確かめればよいです。

[*10] 実際には $f : c \to c'$ につき一つこの図式があるので、大量の可換図式ですが。

[*11] ここでは示しませんが自然同型は逆向きの射を必ず持つので、左右対称な記号を使っても実際には問題ありません。以下では左から右への自然変換が自然同型であると理解します。ちなみに、$\cong$ は左右対称ではないです。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y,c) & \xrightarrow{(f^*)_c} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c) \\
\downarrow g_* & & \downarrow g_* \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(y,c') & \xrightarrow[(f^*)_{c'}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x,c')
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \\
\downarrow & & \downarrow \\
g \circ \varphi & \longmapsto & g \circ \varphi \circ f
\end{array}$$

これは圏の定義から従います。反変関手の間の自然変換 $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,x) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,y)$ も同様に定まります。

次節に進む前に、普遍性を扱うときによく使う簡単な補題を証明しておきましょう。

補題 25. 1. $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ を共変関手とし、$c_0 \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ とする。$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c_0,-),F)$ で $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c_0,-)$ から F への自然変換全体の集合[*12]を表すことにする。次の写像は全単射である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c_0,-),F) &\longrightarrow Fc_0 \\
\alpha &\longmapsto \alpha_{c_0}(\mathrm{id}_{c_0})
\end{aligned}$$

2. $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ を反変関手とし、$c_0 \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ とする。次の写像は全単射である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,c_0),F) &\longrightarrow Fc_0 \\
\alpha &\longmapsto \alpha_{c_0}(\mathrm{id}_{c_0})
\end{aligned}$$

証明. どちらも同様なので 2 のみ証明します。逆写像を構成するため、$x \in Fc_0$ に対して自然変換 $\tilde{x} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,c_0) \Rightarrow F$ を構成します。各 $c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ に対して $\tilde{x}_c : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,c_0) \to Fc$ を次で定めましょう。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,c_0) &\xrightarrow{\tilde{x}_c} Fc \\
\varphi &\longmapsto F\varphi(x)
\end{aligned}$$

まず、これが自然変換になっていることは次の可換図式の可換性から従います。$f : c \to c'$ を $\mathbf{C}$ における任意の射とします。

[*12] これが集合であることは非自明ですが、この補題からそのことがわかると言ってもよいです。気にしなくてもよいです。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c_0) \arrow[r, "\tilde{x}_c"] & Fc & \varphi \circ f \arrow[r, mapsto] & F(\varphi \circ f)(x) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', c_0) \arrow[r, "\tilde{x}_{c'}"'] \arrow[u, "f_*"] & Fc' \arrow[u, "Ff"'] & \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & F\varphi(x) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

これは

$$Ff(F\varphi(x)) = Ff \circ F\varphi(x) = F(\varphi \circ f)(x)$$

より可換です。二番目の等号は反変関手の定義から従います。

次に $x \mapsto \tilde{x}$ と $\alpha \mapsto \alpha_{c_0}(\mathrm{id}_{c_0})$ が互いに逆であることを示します。$\tilde{x}_{c_0}(\mathrm{id}_{c_0}) = x$ であることは定義から明らかです。逆に $x = \alpha_{c_0}(\mathrm{id}_{c_0})$ と置いて、$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, c_0), F)$ において $\tilde{x} = \alpha$ を示します。そのためには各 $c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ で $\tilde{x}_c = \alpha_c$ を示せばよいです。これは写像の等号なので、任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', c_0)$ で $\tilde{x}_c(\varphi) = \alpha_c(\varphi)$ を示せばよいです。

$$\tilde{x}_c(\varphi) = F\varphi(x) = F\varphi(\alpha_{c_0}(\mathrm{id}_{c_0})) = \alpha_c(\varphi_*(\mathrm{id}_{c_0})) = \alpha_c(\varphi)$$

となり示せました。三番目の等号は α が自然変換であることから従います。 $\square$

3 普遍性

本題です。加群のテンソル積と剰余環の普遍写像性質に関する考察を進めましょう。この二つの普遍写像性質は、任意の対象への準同型が別の情報から一意に決まるというものでした。テンソル積の場合を Hom の記号を使って書けば、$N \times M$ から T への双線形写像全体の集合と $\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N \otimes_A M, T)$ との間に全単射があるという性質です。実はこれはただの全単射ではなく、T について自然な全単射になっています。

命題 26. 共変関手 $\mathcal{L}(N, M; -) : A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Set}$ を

$$\begin{array}{ccc}
A\text{-}\mathbf{mod} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
\hline
S & & \mathcal{L}(N, M; S) \\
f \downarrow & & \downarrow f_* \\
T & & \mathcal{L}(N, M; T)
\end{array}$$

で定める。ただし $\mathcal{L}(N, M; S)$ は $N \times M$ から S への双線形写像全体の集合で、f_* は f を後から合成する写像

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(N,M;S) &\xrightarrow{f_*} \mathcal{L}(N,M;T)\\ \Phi &\longmapsto f\circ\Phi\end{aligned}$$

とする。このとき普遍写像性質から定まる全単射

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N\otimes_A M, T)\to\mathcal{L}(N,M;T)$$

は T について自然である。つまり、自然同型

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N\otimes_A M, -)\cong\mathcal{L}(N,M;-)$$

を定める。

証明. 普遍写像性質から定まる全単射

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N\otimes_A M, T)\to\mathcal{L}(N,M;T)$$

は $\otimes$ の合成

$$\varphi\mapsto\varphi\circ\otimes=\varphi_*(\otimes)$$

ですこれは補題 25 によって定まる自然変換 $\tilde{\otimes}:\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N\otimes_A M,-)\Rightarrow\mathcal{L}(N,M;-)$ と一致します。 □

この結果をもとに、次の定義をします。

定義 27.
1. 共変関手 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{Set}$ はある $c\in\mathrm{Ob}\mathbf{C}$ があって $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,-)$ と自然同型となるとき、表現可能であると呼ばれる。このとき c が F を表現すると言い、補題 25 によって定まる $x\in Fc$ を普遍元と呼ぶ。
2. 反変関手 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{Set}$ はある $c\in\mathrm{Ob}\mathbf{C}$ があって $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,c)$ と自然同型となるとき、表現可能であると呼ばれる。このとき c が F を表現すると言い、補題 25 によって定まる $x\in Fc$ を普遍元と呼ぶ。

例 28. 共変関手 $\mathcal{L}(N,M;-):A\text{-}\mathbf{mod}\to\mathbf{Set}$ は $\otimes\in\mathcal{L}(N,M;N\otimes_A M)$ を普遍元として $N\otimes_A M$ によって表現されます。

普遍写像性質を一般化して、普遍性を定義しましょう。

定義 29. 圏 $\mathbf{C}$ における普遍性を持つ対象とは、ある関手[*13] $F:\mathbf{C}\to\mathbf{Set}$ を表現する対象のこととする。二つの対象が同じ関手を表現するとき、同じ普遍性を持つと言う。

次の命題は命題 2 の一般化です。証明も完全に同様に進みます。

[*13] 共変でも反変でもよい。

定理 30. $c, c' \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ が同じ普遍性を持つ時、普遍元と交換する同型 $\phi : c \to c'$ が一意に存在する。つまり c, c' が F を表現しているとし、c の普遍元を $x \in Fc$ とし c' の普遍元を $x' \in Fc'$ とすると、F が共変のときは

$$F\phi(x) = x'$$

F が反変の時は

$$F\phi(x') = x$$

を満たす同型 $\phi : c \to c'$ が一意に存在する。

証明. F が共変の場合のみ示します。仮定より

$$\tilde{x} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F, \quad \tilde{x'} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', -) \cong F$$

です。$(\tilde{x'})_c : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', c) \to Fc$ が全単射なので $x \in Fc$ に対して $\varphi : c' \to c$ で

$$F\varphi(x') = (\tilde{x'})_c(\phi) = x$$

となるものが一意にあります。あとはこの ϕ が同型であることを示せばよいです。同様に $\psi : c \to c'$ で

$$F\psi(x) = (\tilde{x})_c(\psi) = x'$$

となるものが一意にあります。このとき

$$F(\varphi \circ \psi)(x) = F\varphi(x') = x = F\mathrm{id}_c(x)$$

ですが、これは id_c と $\varphi \circ \psi$ の

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c) & \xrightarrow{\quad \tilde{x}_c \quad} & Fc \\ f & \longmapsto & Ff(x) \end{array}$$

による像が一致することを意味します。$\tilde{x}_c$ は全単射なので $\mathrm{id}_c = \varphi \circ \psi$ です。同様に $\mathrm{id}_{c'} = \psi' \circ \varphi$ となる $\psi' : c \to c'$ が一意に存在し、

$$\psi = \psi' \circ \varphi \circ \psi = \psi'$$

となるため、同型であることが従います。 $\square$

可換環論からいくつか普遍性の例を挙げます。詳しくは [Term, 原論, 層ホモ, 永井] などを見てください。

例 31.

1. A を可換環、I をそのイデアルとします。剰余環 A/I は、可換環 B を $I \subset \mathrm{Ker} f$ を満たす環準同型からなる $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, B)$ の部分集合に送る共変関手 $\mathbf{CRing} \to \mathbf{Set}$ を表現しています。

2. A を可換環、S をその積閉集合とします。局所化 $S^{-1}A$ は、可換環 B を、$f(S) \subset B^*$ を満たす環準同型からなる $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(A, B)$ の部分集合に送る共変関手 $\mathbf{CRing} \to \mathbf{Set}$ を表現しています。
3. A を可換環とします。一変数多項式環 $A[X]$ は例 14 の共変関手 $U : A\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{Set}$[*14]を表現しています。
4. A を可換環とします。自由加群 A は例 14 の共変関手 $U : A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Set}$ を表現しています。
5. N, M を A 加群とします。直和 $N \oplus M$ は、A 加群 L を $\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(N, L) \sqcup \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(M, L)$[*15]に送る共変関手 : $A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Set}$ を表現しています。
6. N, M の直和 $N \oplus M$ は、次の反変関手 : $A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Set}$ も表現しています。

$$\underline{A\text{-}\mathbf{mod} \longrightarrow \mathbf{Set}}$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}(S, N) \times \mathrm{Hom}(S, M) \\ T & \mathrm{Hom}(T, N) \times \mathrm{Hom}(T, M) \arrow[u, "f^* \times f^*"'] \end{tikzcd}$$

7. N, M を A 加群とします。Hom 加群 $\mathrm{Hom}(N, M)$ は次の反変関手を表現しています。

$$\underline{A\text{-}\mathbf{mod} \longrightarrow \mathbf{Set}}$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}(S \otimes_A N, M) \\ T & \mathrm{Hom}(T \otimes_A N, M) \arrow[u, "(f \otimes_A \mathrm{id}_N)^*"'] \end{tikzcd}$$

演習 32. 例 31 を確かめよ。

4 普遍性の向き

普遍性は関手の表現として定式化されましたが、表現される関手が共変か反変かどうかで普遍性を持つ対象の性質は大きく変わります。その最もわかりやすい例は随伴と極限の交換です。ここではこのことを結果だけ述べます。詳しくは [Context, 層ホモ, 壱大整域] などを見てください。

[*14] A-**alg** は定義していないですが、A 代数と A 代数準同型のなす圏のことです。
[*15] $\sqcup$ は集合の非交和を表しています。

定義 33. $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を共変関手とする。反変関手

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \hline c & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fc, d) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (Ff)^*} \\ c' & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fc', d) \end{array}$$

がすべての $d \in \mathrm{Ob}\mathbf{D}$ で表現可能の時、F は左随伴関手であると言う。

例 34. 例 31 より、関手 $- \otimes_A N : A\text{-}\mathbf{mod} \to A\text{-}\mathbf{mod}$ は左随伴関手であることがわかります。

定理 35. 共変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が左随伴関手であるとする。共変関手 $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が存在して、任意の $d \in \mathrm{Ob}\mathbf{D}$ で反変関手

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \hline c & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fc, d) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (Ff)^*} \\ c' & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fc', d) \end{array}$$

が Gd によって表現され、任意の $c \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ で共変関手

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \hline d & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, Gd) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Gg)_*} \\ d' & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, Gd') \end{array}$$

が Fc によって表現される。

注意 36. この定理から F が左随伴関手の時、Fc は普遍性を持っていることがわかります。

定義 37. (c_λ) を $\mathbf{C}$ の対象の族とする。共変関手

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \\ \hline \begin{tikzcd} c \arrow[d, "f_*"'] & \coprod_\lambda \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c_\lambda, c) \arrow[d, "(Ff)_*"] \\ c' & \coprod_\lambda \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c_\lambda, c') \end{tikzcd} \end{array}$$

が表現可能の時、表現する元を (c_λ) の余積と呼び、$\coprod_\lambda c_\lambda$ と書く。[*16]

例 38. 例 31 より、関手 $N \oplus M$ は N と M の余積です。より一般に A 加群の族 (M_λ) に対して加群の直和 $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ は (M_λ) の余積です。

定理 39. 共変関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が左随伴関手で (c_λ) の余積が存在するとき、(Fc_λ) の余積も存在し

$$F\left(\coprod_\lambda c_\lambda\right) = \coprod_\lambda Fc_\lambda$$

が成り立つ。つまり、左随伴関手は余積と交換する。

系 40. 加群のテンソル積は直和と交換する。つまり、

$$\left(\bigoplus_\lambda M_\lambda\right) \otimes_A N = \bigoplus_\lambda (M_\lambda \otimes_A N)$$

が成り立つ。

対象 c が共変関手を表現するとは $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -) \cong F$ ということだったので、このとき c から出る射は F によってよくわかります。反対に反変関手を表現するときはその対象へ入る射がよくわかります。これを普遍性の向きと呼ぶことにします。一般に同じ向きの普遍性は相性がよく、交換することを普遍性の議論で簡単に示せることが多いです。例えば局所化と剰余環の交換、局所化と多項式環の交換、環のテンソル積と多項式環の交換、局所化同士の交換などがあります。また、全射性は共変関手を表現する普遍性と相性がよく、単射性は反変関手を表現する普遍性と相性がよいです。例えば加群のテンソル積は右完全で Hom は左完全であることもこの一例と思えます。

随伴関手の値も余積も共変関手を表現していたので、定理 39 もそれに並ぶものと考えることができます。この類の主張にはさらに、極限という構成がそれ自身と交換するとか、一般の極限と随伴が交換するとか、随伴が Kan 拡張と交換するとかといったものがあります。

[*16] 集合の圏での余積は非交和であることが示せます。集合の非交和や加群の直和と一般の圏での余積で記号を分けるのは、具体的な圏での具体的な構成と一般の圏での構成を区別するためです。

5 言っておくべきこと

簡単な補題と称して証明した補題 25 は米田の補題として知られる主張です。ご覧の通りの簡単な補題ですが、変に有名なせいか難しい定理だと思っている人が多いようだったので、先入観を持たずに眺めてもらうためあえて名前を出しませんでした。普遍性に関する議論でたくさん使う様子も伝わったかと思います。

はじめは普遍性の向きについて面白い話が書けるだろうと思っていたのですが、結局うまく書けませんでした。普遍性の向きについてはいつかどこかでちゃんと書きたいです。それまでによく考えておきます。

地の文や証明を敬体で書いて定理などの主張を常体で書くのは [池田 18] のオマージュです。書いていて自主ゼミで苦しんだ思い出がよみがえってきました。怖がらずに読めることが利点だと思ったのですが、読みにくくなってしまったかもしれません。

冒頭でも書きましたが、Wathematica advent calendar 2024*17に参加しています。運営の方々に感謝します。

また、この記事の内容は Wathematica*18や都数*19で教わった内容を含みます。いつもありがとうございます。来年もよろしくお願いします。

参考文献

[Term] A. Altman, S. Kleiman, *A Term of Commutative Algebra*. Worldwide Center of Mathematics, https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/116075.2, 2021.

[壱大整域] alg-d, **壱大整域**. https://alg-d.com/math/kan_extension/.

[Context] E. Riehl, *Category Theory in Context*. Courier Dover Publications, https://emilyriehl.github.io/books/, 2017.

[池田 18] 池田岳, **数え上げ幾何学講義**. 東京大学出版会, 2018.

[池田 22] 池田岳, **テンソル代数と表現論**. 東京大学出版会, 2022.

[世界] 斎藤毅, **線形代数の世界**. 東京大学出版会, 2007.

[原論] 斎藤毅, **数学原論**. 東京大学出版会, 2020.

[層ホモ] 志甫淳, **層とホモロジー代数**. 共立出版, 2007.

[永井] 永井保成, **代数幾何学入門**. 森北出版, 2021.

*17 https://wathematica-adv-2024.vercel.app/

*18 https://wathematica.github.io/

*19 https://tosuu.web.fc2.com/